東邦大学 理学部 物理学科
2021 年度 総合入試（併願制） 課題

2021 年度 総合入試（併願制）の詳細につきましては、募集要項を必ずご確認ください。

- **3 日間の「大学物理への入門」に、理子さんと博士と一緒に挑戦しましょう。**
  - 大学で学ぶ物理では、微積分をはじめとする数学が用いられます。そこで、本課題は、高校物理の基礎的な内容を、高校で学ぶ数学を用いて考察することで、大学での学びへの橋渡しとすることを意図しています。
  - 課題および解説で用いられる数学は、数学 II・B の範囲までの内容が主で、一部で数学 III の知識が必要になりますが、いずれの場合にも、文中で補助が与えられています。
- **2020 年 9 月 26 日 (土) に、課題についての質疑応答を含む面接試験を約 30 分間行います。**
  - 各課題について、解答を それぞれ レポート用紙 1~2 枚程度にまとめたもの (**正本 1 部、コピー 3 部**) を面接当日に持参して提出してください。レポートを参考に面接が行われます。
  - レポート作成にあたって、教科書等で調べたり，まわりの人と議論したりしても結構ですが、しっかりと内容を理解してまとめるように心掛けてください。
  - 大学では自ら学ぶ姿勢が大切になります。面接では、どのように考え、計算し、結論にいたったのか、その過程を自分の言葉で述べられるかどうかも重視されます。
- **1 日目・2 日目の課題：** 必須課題です。受験者全員が取り組んでください。
  - 1.1 ～ 1.3 節、2.1 ～ 2.3 節の解説の後、1.4 節、2.4 節にそれぞれ課題が示されています。
  - 1・2 日目の課題について基準に達していれば面接試験は合格 となります。
- **3 日目の課題：** 自由挑戦課題です。希望者は取り組んでください。
  - 解説は 3.1 ～ 3.3 節に、課題は 3.4 節に示されています。
  - 3 日目の課題は加点にのみ用いられます。積極的に挑戦してみましょう。

問い合わせ先：

東邦大学アドミッションオフィス

274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1 (電話：047-472-0666)

1　大学物理への入門 (1 日目)：運動方程式

理子：　今日から 3 日間、大学で学ぶ物理について勉強しに来ました。

博士：　大学では、基本法則からはじめて、一歩一歩積み上げるようにして物理を学ぶんだ。1 日目は、高校の「物理基礎」で学んだ「鉛直投げ上げ運動」を例にして、運動方程式とその解き方について、勉強することにしよう。

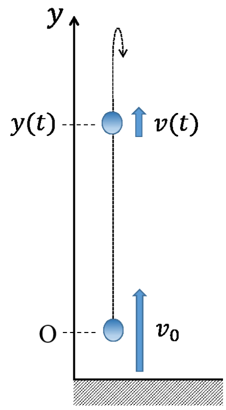
高校「物理基礎」：鉛直投げ上げ運動の公式

投げ上げた点を原点として、鉛直上向きに y 軸をとり、t〔s〕後の小球の位置を $y(t)$〔m〕、速度を $v(t)$〔m/s〕とする（右図参照）。初速度を $v(0) = v_0$〔m/s〕とするとき、高校「物理基礎」で学んだ「等加速度運動の公式」より、

$$v(t) = v_0 - gt \tag{1.1}$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.2}$$

が成り立つ。ここで g〔m/s^2〕は重力加速度の大きさである。



1.1　微分を用いた運動方程式の表式

博士：　運動の 3 法則を覚えているかい？

理子：　慣性の法則、運動の法則 (運動方程式)、作用反作用の法則です。

博士：　そうだね。(1.1), (1.2) 式は基本法則の一つである運動方程式 $ma = F$ から得られるんだ。ここで、F〔N〕は力、m〔kg〕は質量、a〔m/s^2〕は加速度だけど、加速度を速度を用いて表すことはできるかい？

理子：　高校「物理基礎」で学んだように、時刻 t_1〔s〕における速度を $v_1 = v(t_1)$〔m/s〕、時刻 t_2〔s〕における速度を $v_2 = v(t_2)$〔m/s〕とすると、「平均の加速度」$\bar{a}$〔m/s^2〕は、

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.3}$$

で与えられます。$\Delta t = t_2 - t_1$〔s〕を用いると、(1.3) 式は

$$\bar{a} = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} \tag{1.4}$$

と表せます。ここで、$\Delta t \to 0$ とすると、左辺は「瞬間の加速度」$a(t_1)$〔m/s^2〕になります。

博士：　数学 II で学んだ「導関数」の定義を用いると、右辺はどうなるだろう？

高校「数学 II」：$f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.5}$$

理子：　「導関数の定義」を用いると、 (1.4) 式の右辺で $\Delta t \to 0$ とした結果は、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{dv(t_1)}{dt} = v'(t_1) \tag{1.6}$$

となります。これより、瞬間の加速度は速度の微分で与えられること、すなわち $a(t_1) = v'(t_1)$ であることが分かります！

博士： よく気づいたね。「瞬間の速度」についても同様の議論を行うことで、時刻 t_1 における瞬間の速度 $v(t_1)$〔m/s〕は、t_1 における変位 $x(t)$〔m〕の微分で与えられること、すなわち $v(t_1) = x'(t_1)$ であることを導くことができる。これらの結果は t_1 の選び方にはよらないので、任意の時刻 t〔s〕で成り立つ結果だ。よって

大学の物理：微分を用いた速度と加速度の表式

速度 $v(t)$ は変位 $x(t)$ を、加速度 $a(t)$ は速度 $v(t)$ を時間で微分したものである。

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{1.7}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{1.8}$$

博士：「大学の物理」では「瞬間の速度」を単に「速度」、「瞬間の加速度」のことを「加速度」と呼ぶので、これらの呼び方を用いることにしたよ。

理子： 運動方程式も「瞬間の運動方程式」として成り立つのですか？

博士： そのとおり、運動方程式は瞬間の加速度の場合にも次のように成り立つよ。大学の物理ではこれを単に「運動方程式」と呼ぶんだ。

大学の物理：微分を用いた運動方程式の表式

F〔N〕の力が質量 m〔kg〕の物体に作用するとき、その運動は運動方程式

$$ma(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = F(x) \tag{1.9}$$

で記述される。ここで、$F(x)$ は物体が $x = x(t)$〔m〕の位置にあるときに作用する「瞬間の力」であるが、これを単に「力」と呼ぶ。

1.2 積分を用いた運動方程式の解法

博士： これで準備は整った。ここからは鉛直投げ上げ運動の場合について考えよう。鉛直投げ上げ運動の場合には、力 F と加速度 $a(t)$ はどのように表されるかな？

理子： 鉛直上向きが正の方向だから、符号に気をつけて・・・力は $F = -mg$ です。そして、運動方程式 (1.9) から次のようになります：

$$a(t) = -g \tag{1.10}$$

博士： よろしい。それでは、まず $v(t)$ の公式 (1.1) を導こう。まず、(1.8) 式に着目する。これは、$v(t)$ が $a(t)$ の「原始関数」であることを意味しているのだけど、わかるかい？

高校「数学 II」：原始関数

微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を、$f(x)$ の原始関数という。

$$F'(x) = f(x) \tag{1.11}$$

理子： 用いている記号は違うけど・・・はい、分かります！
博士： すると、高校「数学 II」で学んだ「不定積分」を適用して、$a(t)$ から $v(t)$ を計算できるね。

高校「数学 II」：不定積分

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき、すなわち $F'(x) = f(x)$ であるとき、

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \tag{1.12}$$

理子： 速度 $a(t)$ は、加速度 $v(t)$ を時間で積分すれば得られます。

$$\int a(t)dt = v(t) + C \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \int a(t)dt - C \tag{1.13}$$

博士： そうだね。加速度は運動方程式から (1.10) 式のように与えられている。積分を実行してみよう。
理子： はい、次のように計算できます。

$$v(t) = \int a(t)dt - C = -\int gdt - C = -gt - C \tag{1.14}$$

博士： そのとおり。この積分定数 C は、速度の初期条件を利用すると求められるよ。
理子： $t = 0$ で $v(0) = v_0$ だから・・・$v_0 = -C$ となって・・・あっ。(1.1) 式が導かれました！

$$v(t) = v_0 - gt \tag{1.15}$$

博士： 次に、$y(t)$ を求めて公式 (1.2) を導こう。$v(t) = y'(t)$ だから、$y(t)$ は $v(t)$ の原始関数だね。

$$\int v(t)dt = y(t) + D \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \int v(t)dt - D \tag{1.16}$$

この積分における積分定数は、(1.13) 式の積分定数 C とは異なるから、別の記号 D を用いて表しておいたよ。右辺の $v(t)$ に (1.16) 式を代入して $y(t)$ を求めてみよう。
理子： はい。次のように計算できます。

$$y(t) = \int (v_0 - gt)dt - D = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - D \tag{1.17}$$

博士： 初期条件から D を決めてごらん。
理子： 初期条件 $y(0) = 0$ より $D = 0$ と定まるので、公式 (1.1) が導かれました！

1.3 まとめと補足

博士： 先程行った計算のながれをまとめると、

$$\boxed{\text{運動方程式}} \overset{(1.9)}{\Longrightarrow} \boxed{a(t)} \overset{\text{積分}}{\Longrightarrow} \boxed{v(t)} \overset{\text{積分}}{\Longrightarrow} \boxed{y(t)} \tag{1.18}$$

のように、運動方程式から加速度 $a(t)$ を求め、それを 2 回積分することで $y(t)$ を求めたことになるね。このように、運動方程式を積分して、変位を時間の関数 $y(t)$ として求めることを、「運動方程式を解く」と言うんだ。そして、求まった $y(t)$ を「運動方程式の解」と呼ぶ。
理子： $y(t)$ を求めるためには、2 回積分が必要ですね。
博士： そうだね、すると、2 つ積分定数が表れることになる。これらが、2 つの初期条件 $y(0) = 0$ と $v(0) = v_0$ によって決定される、という構造になっていたんだ。

大学の物理：運動方程式の解法

- 運動方程式から変位 $x(t)$ を求めることを運動方程式を解くと言う。
- $x(t)$ を求めるためには、積分を 2 回しなければならないので、積分定数が 2 つあらわれ、それらは初期条件によって決められる。
  1. まず、運動方程式から $a(t) = F/m$ と求まる加速度を 1 回積分して $v(t)$ を求める。
  $$v(t) = \int a(t)dt - C = \int \frac{F}{m}dt - C \tag{1.19}$$
  $v(t)$ についての初期条件を用いて、積分定数 C を決める。
  2. 次に、求まった $v(t)$ を積分して $x(t)$ を求める。
  $$x(t) = \int v(t)dt - D \tag{1.20}$$
  $x(t)$ についての初期条件を用いて、積分定数 D を決める。

理子： ・・・うーん。運動方程式を解いて、鉛直投げ上げ運動の問題を解きましたが、けっこう大変ですね。公式をそのまま適用したほうが、簡単だし、便利なような気がするのですが・・・。

博士： たしかにそう感じるね。鉛直投げ上げ運動や水平投射のような問題しか世の中になければ、「運動方程式を解く」方法は必要なかっただろうね。しかし、「大学の物理学」では、鉛直投げ上げ運動や水平投射よりも、もっと複雑な問題を取り扱うし、原子核の中や、素粒子同士の間にはたらく力も存在する。これらすべての場合について「公式」を覚えるのがよいと思うかい？

理子： とても無理だと思います。

博士： そう、公式の暗記はほとんど不可能だ。ところが、「運動方程式を解く」方法はこれらの問題にも適用可能なんだ。

理子： なるほど！ 様々な問題に適用可能な、普遍的なやり方なのですね。

1.4 課題 1

博士： 今日の内容の課題は水平投射の問題だ。これを大学の物理の考え方で解いてほしい。鉛直投げ上げ問題と違って、運動の方向が 2 つあることに注意しよう。高校物理でもそうだったように、運動方程式のベクトル版

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.21}$$

からスタートして、水平方向と鉛直方向に運動を分けて考えることが必要だよ。

課題 1：水平投射

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。時刻 t〔s〕における、質量 m の小球の位置の x 座標を $x(t)$〔m〕、y 座標を $y(t)$〔m〕とし、速度の x 成分を $v_x(t)$〔m/s〕、y 成分を $v_y(t)$〔m/s〕とする。また、位置の初期条件は $x(0) = 0,\ y(0) = h$〔m〕、速度の初期条件を $v_x(0) = v_0$〔m/s〕, $v_y(0) = 0$ とする。小球には重力のみがはたらいているとし、重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。

1. x 方向、y 方向の運動方程式をそれぞれ書き下してください。
2. x 方向、y 方向の運動方程式を解いて、$x(t), y(t)$ を求めてください。

2　大学物理への入門 (2 日目)：力学的エネルギー保存則

博士：　2 日目は「力学的エネルギー保存則」について大学の物理の考え方で勉強しよう。
理子：　力学的エネルギー保存則も基本法則から導かれるのですか？
博士：　そのとおり。1 日目と同じように、「鉛直投げ上げ運動」を例にとろう。

高校「物理基礎」：鉛直投げ上げ運動における力学的エネルギー保存則

鉛直方向に小球を投げ上げると、運動エネルギーが減少する一方で、重力による位置エネルギーは増加する。質量 m〔kg〕の小球が、位置 $h_\mathrm{A}, h_\mathrm{B}$〔m〕にある点 A, B を、時刻 $t_\mathrm{A}, t_\mathrm{B}$〔s〕に通過するときの速度を $v_\mathrm{A}, v_\mathrm{B}$〔m/s〕とする。このとき、

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 + mgh_\mathrm{A} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 + mgh_\mathrm{B} \tag{2.1}$$

が成り立つ。(2.1) 式は点 A, B の選び方にはよらないから、鉛直投げ上げ運動において、次の力学的エネルギー E〔J〕が保存する。

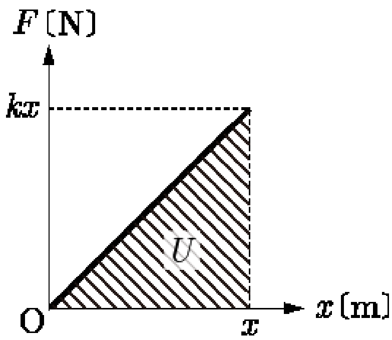
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{2.2}$$

2.1　積分を用いた仕事の表式

博士：　運動方程式

$$mv'(t) = F(x) \tag{2.3}$$

から、力学的エネルギー保存則を導こう。力学的エネルギー保存則はジュール〔J〕の単位を持つ「エネルギー」あるいは「仕事」の間の関係式だから、運動方程式からジュール〔J〕の単位を持つ量を構成しなければならないね。



理子：　すぐに思いつくのは、右辺の力 F〔N〕に変位 x〔m〕をかけて仕事 W〔J〕を作ることです：

$$W = Fx \tag{2.4}$$

博士：　しかし、これは、ばねのように、力が変位に依存する場合 $F = F(x)$ には適用できないね。高校「基礎物理」で「ばねのする仕事 (あるいは弾性エネルギー)」はどのように得られたかな。
理子：　F-x 図の面積で与えられました (右上図参照)。
博士：　そうだね。「仕事が F-x 図の面積で求まる」という事実は、ばねのする仕事以外の場合にも成り立つんだ。ここで、高校「数学 II」で学んだ「定積分」と面積の関係を用いよう。

高校「数学 II」：定積分と図形の面積

$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{2.5}$$

で与えられる。ここで、区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする。

博士： すると、「仕事が F-x 図の面積で求まる」ということは、「力 F を変位 x で積分すると仕事が求まる」と結論付けられる。

大学の物理：変位による力の積分を用いた仕事の表式

物体にはたらく力の向きと物体を動かす向きが同じで、力 F〔N〕が保存力である場合を考える。物体が位置 x_1〔m〕から位置 x_2〔m〕まで移動したときに力のする仕事 W〔J〕は、F - x 図の面積、すなわち

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{2.6}$$

で与えられる。

博士： さて、すぐ後で必要になるので、仕事を積分で表す別のやり方を与えておこう。「物理基礎」で「仕事率」を習ったと思う。これを力 F と速度 v〔m/s〕で表してみよう。

理子： (物理基礎の教科書を調べて) えーと、仕事率を P〔J/s〕とすると、$P = Fv$ です。

博士： 仕事率は「単位時間あたりの仕事」だったから、時間 t〔s〕の間の仕事は

$$W = Pt = (Fv)\,t \tag{2.7}$$

で与えられる。これは仕事率が時間に依存しない場合だ。仕事率が時間に依存する場合には・・・

理子： 力が位置に依存しない場合の仕事 (2.4) を、(2.6) に拡張したのと同じように、仕事率を時間で積分すればよいのですね！

博士： そのとおり。この結果もまとめておこう。

大学の物理：時間による仕事率の積分を用いた仕事の表式

仕事率 $P(t) = Fv(t)$〔J/s〕で、時刻 t_1〔s〕から t_2〔s〕の間に力のする仕事 W〔J〕は

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F\,v(t)dt \tag{2.8}$$

で与えられる。

博士： 物体が時刻 t_1 に位置 x_1、時刻 t_2 に位置 x_2 にあるとすると、(2.6) 式と (2.8) 式の仕事は一致する。

理子： なるほど、(2.6) 式, (2.8) 式のどちらの方法でも仕事を求めることができるのですね。

2.2 積分を用いたエネルギー保存則の導出

博士： (2.6) 式を鉛直投げ上げ運動の場合に適用してみよう。

理子： はい、$F = -mg$ を代入して、数学 II で習った「定積分」に従って計算すると、

$$W = \int_{h_\mathrm{A}}^{h_\mathrm{B}} F(x)dx = \int_{h_\mathrm{A}}^{h_\mathrm{B}} (-mg)dx = -mgh_\mathrm{B} + mgh_\mathrm{A} \tag{2.9}$$

と求まります。

博士： ここで、この結果を用いて、力学的エネルギー保存則 (2.1) を次のように変形しよう。

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = -mgh_\mathrm{B} + mgh_\mathrm{A} = \int_{h_\mathrm{A}}^{h_\mathrm{B}} F(x)dx \tag{2.10}$$

これと運動方程式 (2.3) を見比べてみて、何かひらめかないかい？

理子： 右辺は力を積分して仕事にしたものだから・・・もしかして・・・運動方程式を積分して、仕事の単位を持つ量をつくることで、力学的エネルギー保存則が導かれるのでしょうか？

博士： そのとおり！そこで、運動方程式の左辺の $mv'(t)$ を積分することを考えよう。この場合、(2.6) 式と (2.8) 式のどちらの方法を用いるのがよいだろう？

理子： これは t の関数なので、次のように t で積分する (2.8) 式のやり方がよいと思います。

$$\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} (mv')\, v\, dt \;=\; m\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} vv'\, dt \tag{2.11}$$

博士： そうだね。問題はこの積分だ。高校「数学 III」で学ぶ「合成関数の微分法」が必要になる。

高校「数学 III」：合成関数の微分法

関数 $y = f(u)$ と $u = g(t)$ の合成関数 $y = f(g(t))$ の t による微分は以下で与えられる。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} \tag{2.12}$$

博士： この「合成関数の微分法」を用いて、$\frac{1}{2}v^2(t)$ の t による微分を計算してみよう。

理子：「合成関数の微分法」の公式で $y = f(v) = \frac{1}{2}v^2,\ u = g(t) = v(t)$ と考えて、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{dt} = vv' \tag{2.13}$$

となります。

博士： そのとおり！ (2.13) 式の結果は、$\frac{1}{2}v^2(t)$ が $v(t)v'(t)$ の原始関数であることを意味しているよ。

理子： ($F(t) = \frac{1}{2}v^2(t),\ f(t) = v(t)v'(t)$ としてみると・・・) ほんとうだ！ とすると、定積分 $\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} f(t)dt = [F(t)]_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}}$ に代入して計算すれば、

$$m\int_{t_A}^{t_B} v\frac{dv}{dt}\, dt = m\left[\frac{1}{2}v^2(t)\right]_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2}mv^2(t_B) - \frac{1}{2}mv^2(t_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{2.14}$$

となって、運動エネルギー項が、運動方程式の左辺 $mv'(t)$ の積分から得られることが示せました！

博士： おつかれさま！ 今日の結果を整理しておこう。

2.3 まとめと補足

大学の物理：運動方程式の積分と力学的エネルギー保存則

運動方程式を積分することで、仕事あるいはエネルギーの単位を持つ量をつくること

$$\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(m\frac{dv}{dt}\right) v\, dt = \int_{h_\mathrm{A}}^{h_\mathrm{B}} F dx \tag{2.15}$$

から、力学的エネルギー保存則が導かれる。特に、「鉛直投げ上げ運動」の場合には、

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 + mgh_\mathrm{B} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 + mgh_\mathrm{A} \tag{2.16}$$

が得られる。

博士： いろいろ積分計算を行ったけど、運動方程式を積分して仕事の単位を持つ量にすることで、力学的エネルギー保存則を導いたことになるよ。

$$\boxed{\text{運動方程式}} \xrightarrow{\text{積分して仕事の単位を持つ量へ}} \boxed{\text{力学的エネルギー保存則}} \tag{2.17}$$

理子： 力学的エネルギー保存則も運動方程式から導出されるなんて驚きでした！でも、少し気になることがあります。

博士： どんなことだい？

理子： 仕事を求める (2.6) 式と (2.8) 式の関係です。物理的な意味は納得できるのですが・・・。

博士： 数学的にはどうなのか、ということだね。実は、両者は数学 III で習う「置換積分法」で関係づけられているんだ。定積分の「置換積分法」を証明なしで引用しよう。

高校「数学 III」：定積分の置換積分法

区間 $[\alpha, \beta]$ で微分可能な関数 $x = g(t)$ に対して、$a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ ならば、$g'(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$ として、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \tag{2.18}$$

博士： この定積分の「置換積分法」を仕事の場合に適用しよう。すると、区間 $[t_\mathrm{A}, t_\mathrm{B}]$ で微分可能な関数 $x = y(t)$ に対して、$h_\mathrm{A} = y(t_\mathrm{A})$, $h_\mathrm{B} = y(t_\mathrm{B})$ ならば、$v(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ として、

$$\int_{h_\mathrm{A}}^{h_\mathrm{B}} F(x)\,dx = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F(y(t))\,v(t)dt = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F\,v(t)dt \tag{2.19}$$

となるので、数学的にも (2.6) 式と (2.8) 式の関係が正しいことが確かめられる。

理子： 教科書ででてきたらしっかり勉強します！今回学んだ物理的な考え方が理解に役立ちそうです。

2.4 課題 2

博士： 2 日目の内容の課題は、ばね振り子における力学的エネルギー保存則の導出だ。これを大学の物理の考え方で解いてほしい。運動エネルギー項の導出は、鉛直投げ上げ運動の場合と同じだね。復習の意味も兼ねて、詳しく計算して再導出してみよう。

課題 2：ばね振り子における力学的エネルギー保存則

質量 m〔kg〕の小球がばね定数 k〔N/m〕のばねに繋がれている。ばね振り子の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{2.20}$$

を積分することで、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 + \frac{1}{2}kx_\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 + \frac{1}{2}kx_\mathrm{B}^2 \tag{2.21}$$

を導いてください。ここで、位置 $x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}$〔m〕にある点 A, B を、時刻 $t_\mathrm{A}, t_\mathrm{B}$〔s〕に小球が通過するときの速度を $v_\mathrm{A}, v_\mathrm{B}$〔m/s〕とします。

3　大学物理への入門 (3 日目)：単振動

博士：　最終日は挑戦課題として、「単振動」について取り扱うよ。

理子：　単振動の公式も運動方程式を解くことで求まるのですか？

博士：　そのとおり！ なんだけど、その導出を行うためには、高校数学の範囲を超えた内容が必要になるんだ。ここでは、高校の「物理」でならう「単振動の公式」が、1 日目に説明した運動方程式の解としては不十分であることを示して、「単振動の公式」の拡張を行うことにしよう。

高校「物理」：単振動の公式

復元力の比例定数を k〔N/m〕とすると、質量 m〔kg〕の物体の単振動の運動方程式は

$$ma(t) = -kx(t) \tag{3.1}$$

である。ここで $a(t)$〔$\mathrm{m/s^2}$〕は時刻 t〔s〕における物体の加速度、$x(t)$〔m〕は釣り合いの位置から変位である。このとき、角振動数 ω〔rad/s〕を

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.2}$$

として、変位 $x(t)$, 速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$ は以下のように与えられる。

$$x(t) = A\sin(\omega t) \tag{3.3}$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t) \tag{3.4}$$
$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) \tag{3.5}$$

3.1　単振動の公式が運動方程式 (3.1) の解になっていること

博士：　数学 III で「三角関数の微分」はもう習ったかい？

理子：　ちょうど勉強しているところです。

博士：　よろしい。それでは次の「三角関数の微分」を、ここでは公式として用いることにしよう。

高校「数学 III」：三角関数の微分

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta, \qquad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \tag{3.6}$$

博士：　2 日目に学んだ「合成関数の微分法」と、「三角関数の微分」を用いて、単振動の公式 (3.3) が運動方程式 (3.1) の解になっていることを示そう。まず、(3.3) 式を時間 t で微分して、速度を求めてみよう。

理子：　$\theta = \omega t$ とすると「合成関数の微分法」より、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\omega = \left(\frac{d}{d\theta}A\sin\theta\right)\cdot\omega \tag{3.7}$$

となります。ここで「三角関数の微分」(3.6) を用いると、

$$\frac{d}{d\theta}A\sin\theta = A\cos\theta = A\cos(\omega t) \tag{3.8}$$

となります。これらの結果をまとめれば次のようになり、これは (3.4) 式と一致しています。

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t) \tag{3.9}$$

博士： 一気に示してしまうとはすごいね。同様に、求まった速度 (3.9) を時間で微分すると、加速度が

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t) \tag{3.10}$$

となることを示すことができるよ。この結果は (3.5) 式と一致しているね。

理子： 1 日目の内容をしっかり理解していることが重要ですね。

博士： さて、変位 (3.3) と加速度 (3.10) を運動方程式 (3.1) に代入して、単振動の公式が運動方程式を満たしているか確かめてみよう。

理子： はい。運動方程式に代入すると、

$$-mA\omega^2\sin(\omega t) = -kA\sin(\omega t) \tag{3.11}$$

となります。ここで、(3.2) 式を用いれば $k = m\omega^2$ なので、右辺は左辺と一致していることがわかります。よって、単振動の公式が運動方程式を満たしていることが示せました。

博士： このことを「変位 (3.3) は運動方程式 (3.1) の解になっている」とも表現するよ。

3.2 単振動の公式が運動方程式 (3.1) の解として不十分であること及びその拡張

理子： 単振動の公式 (3.3) が運動方程式 (3.1) の解になっているのに、何が不十分なのですか？

博士： それについて考えるために、1 日目にまとめた内容について復習してみよう。積分定数と初期条件の関係の部分に着目して、何か気付かないかい？

理子： ・・・あれ？ $t = 0$ での位置の初期条件 $x(0) = x_0$ を考えようとしてみたのですが・・・$\sin 0 = 0$ より $x(0) = 0$ となってしまい、$x_0 = 0$ 以外の初期条件を与えることができません。

博士： いいところに気がついたね。1 日目のまとめにあるように、運動方程式を解く際には、積分を 2 回実行する必要があるため、積分定数が 2 つ表れるはずだった。これに対して、単振動の公式に含まれる、未決定の定数は何個だい？

理子： ω は質量 m と復元力の比例定数 k で定まるから・・・あれっ、振幅 A の 1 つだけです。

博士： そう、だから最初に「単振動の公式は運動方程式の解としては不十分である」と言ったんだ。単振動の公式 (3.3) は、未決定の定数を 2 つ持つように拡張しなければならない。では、どのように拡張すればよいだろう？

理子： 初期位置が自由に決められるようにすればよいから・・・。次のように拡張するのはどうでしょう？

$$x(t) = A\sin(\omega t) + x_0 \tag{3.12}$$

博士： (3.12) 式は運動方程式 (3.1) の解になっているかな？さきほど、単振動の公式が運動方程式の解になっていることを示したのと同様に確かめてみよう。

理子： 加速度を計算して・・・。運動方程式に代入して・・・。うーん、(3.12) 式は運動方程式を満たさないのでダメでした。どのように拡張すればよいのですか？

博士： では、単振動では、「位相」$\theta = \omega t$〔rad〕が変わることによって変位 $x(t)$ も変化することに注目してみよう。すると、初期位置を決めるということは、初期状態における位相を決めることと同じということにならないだろうか？

理子： (等速円運動と単振動の対応の絵を描きながら) あ、たしかにそうです。

博士： よろしい。そこで、定数 α を導入して、$\omega t \;\Rightarrow\; \omega t+\alpha$ のように位相をずらして、次の「拡張した単振動の公式」を考えてみよう。

$$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha) \tag{3.13}$$

理子： なるほど、$t=0$ のときに

$$x(0) = A\sin\alpha \tag{3.14}$$

となるので、たしかに $x(0)=0$ 以外の初期条件を考えることができます。

博士： さらに、(3.13) 式の拡張は、運動方程式 (3.1) の解になっていることが示すことができるんだ。これを確かめるのが今日の課題 3 だよ。

3.3 まとめと補足

大学の物理：拡張した単振動の公式

高校「物理」の「単振動の公式」は、積分定数を 2 つ含む次の公式に拡張される。

$$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha) \tag{3.15}$$

定数 A, α は、初期条件 $x(0)=x_0,\ v(0)=v_0$ によって定まる。

博士： 高校「物理」の単振動の公式 (3.3) は、拡張した単振動の公式 (3.15) において、$x(0)=0$ という初期条件を課して、$\alpha=0$ と決めてしまったものと考えることができるよ。

理子： なるほど、$x(0)=0$ という初期条件を課してしまっているので、限定された場合にしか適用できないということからも、高校「物理」の単振動の公式 (3.3) は不十分であると納得できました。

博士： そのとおりだね。あ、そうそう。今日の内容とは直接関係しないけど、三角関数について考える場合には、単振動のような具体的な問題を思い浮かべると役に立つよ。例えば、単振動 $\sin(\omega t)$ で「角振動数 ω が大きくなったらよりはやく振動する」ということに気づけば、$\sin 2x$ のグラフは $\sin x$ のグラフを x 方向に 2 倍に引き伸ばすのではなく、1/2 に縮めたグラフになると分かるだろう。

理子： これは直感的に理解しやすいです。

博士： また、初期条件のように、$x=0$ のときの値に注目して考えれば、$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは、$\sin x$ のグラフを x 軸方向に、$+\frac{\pi}{4}$ ではなく、$-\frac{\pi}{4}$ ずらしたものになるということも分かるはずだよ。

3.4 課題 3

課題 3：「拡張した単振動の公式」が運動方程式を満たすこと

単振動の公式について、次の各問いに答えてください。

1. 「理子さんが考えた拡張」(3.12) 式について
   (a) 加速度を求めてください。
   (b) 運動方程式 (3.1) を満たさないことを示してください。
2. 「拡張した単振動の公式」(3.15) について
   (a) 加速度を求めてください。
   (b) 運動方程式 (3.1) の解になっていることを示してください。